**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ**

**УНИВЕРСИТЕТ»**

**(СПбГЭУ)**

Факультет информатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

по дисциплине:

«**Численные методы**»

Тема: «MDM-метод и метод условного градиента для общей квадратичной задачи математической диагностики»

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Направленность «Прикладная математика и информатика в экономике и управлении»

Обучающийся Максимов Владимир Павлович

Группа ПМ-2201 Подпись\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Проверила Соловьева Наталья Анатольевна

Должность к.ф.-м.н., доцент

Оценка \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Дата: «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2024 г.

Подпись: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Санкт-Петербург

2024 г.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
|  |  |
| 1. MDM-МЕТОД | 4 |
| 1.1. Постановка задачи | 4 |
| 1.2. Характеризация решения | 6 |
| 1.3. Описание алгоритма | 6 |
|  |  |
| 2. МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА | 7 |
| 2.1. Постановка задачи | 7 |
| 2.2. Оценка плана задачи | 9 |
| 2.3. Описание алгоритма | 10 |
|  |  |
| 3. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ | 10 |
| 3.1. Начальное приближение | 10 |
| 3.2. MDM-метод | 11 |
| 3.2.1. Реализация характеристической функции | 11 |
| 3.2.2. Реализация алгоритма | 12 |
| 3.3. Метод условного градиента | 13 |
| 3.3.1. Реализация характеристической функции | 13 |
| 3.3.2. Реализация алгоритма | 13 |
|  |  |
| 4. ДЕМОНСТРАЦИЯ | 14 |
|  |  |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 16 |
|  |  |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 17 |
|  |  |

**ВВЕДЕНИЕ**

Целью курсовой работы является реализация алгоритмов MDM-метода и метода условного градиента для решения общей квадратичной задачи математической диагностики.

Задачи курсовой работы:

1. составление начального плана задачи;
2. реализация характеристической функции для MDM-метода;
3. реализация характеристической функции для метода условного градиента;
4. создание итерационной функции, реализующей поиск следующего приближения с помощью MDM-метода;
5. создание итерационной функции, реализующей поиск следующего приближения с помощью метода условного градиента;
6. реализация графического интерфейса для демонстрации работы алгоритмов.

Задача, которую требуется решить, ставится следующим образом: пусть есть 2 множества точек и . Требуется найти расстояние между выпуклыми оболочками множеств и . Предполагается, что общих точек у них нет.

1. **MDM-МЕТОД**
   1. **Постановка задачи**

Пусть в пространстве с евклидовой нормой заданы два конечных множества точек и , где . Для визуализации возьмем пространство .

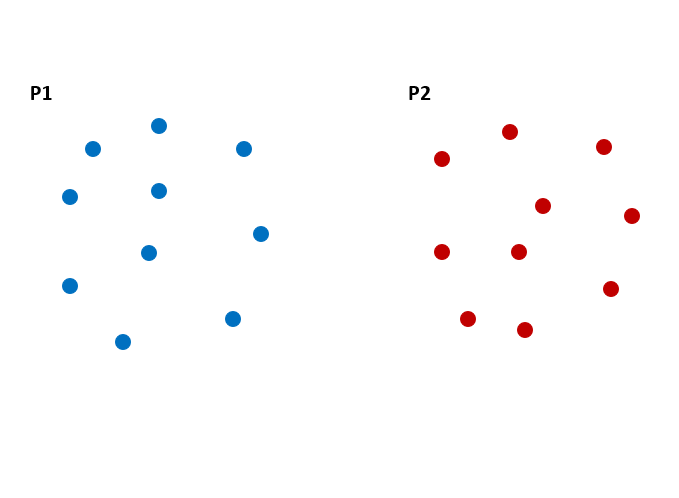


Рисунок 1 – Множества и

Обозначим выпуклую оболочку множества через , а выпуклую оболочку множества через .

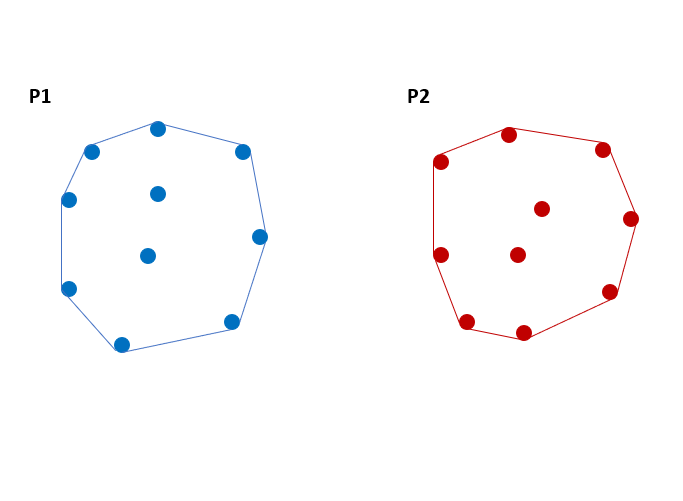


Рисунок 2 – Выпуклые оболочки множеств и

Возьмем 2 произвольные точки: , .

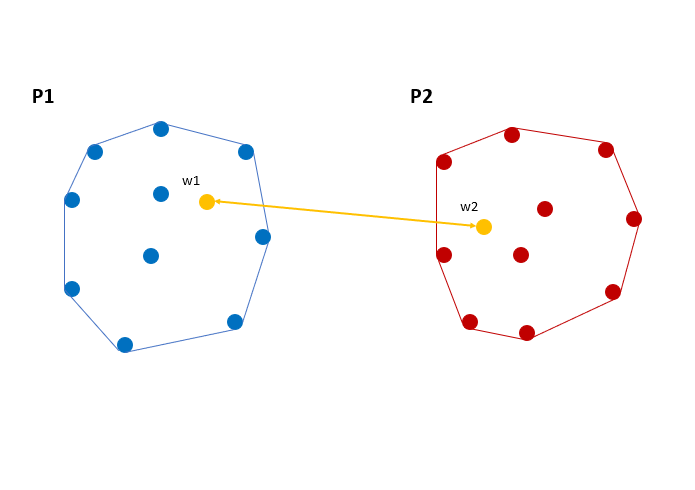


Рисунок 3 – Произвольные точки ,

Квадратичная задача математической диагностики ставится следующим образом: .

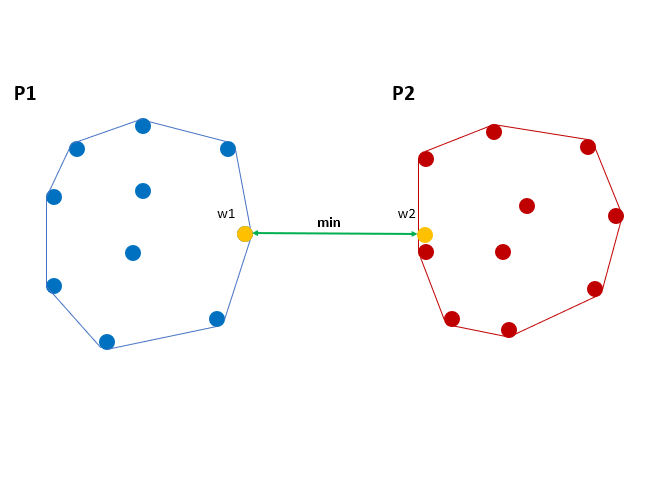


Рисунок 4 – Решение задачи

Точки и имеют представление: ,  согласно определению выпуклой оболочки, где:

1. при всех ,
2. при всех .

Далее будем работать с вектором и со списком коэффициентов , изменять их, тем самым приближая решение к оптимальному.

* 1. **Характеризация решения**

Введем нестандартный критерий оптимальности для плана задачи. Обозначим:

1. ,
2. .

Введем величины:

1. ,
2. .

Положим:

1. *.*

Очевидно, что . Равенство выполняется тогда и только тогда, когда вектор является оптимальным решением задачи. Доказательство приведено в источнике [1].

* 1. **Описание алгоритма**

Пусть уже имеется -е приближение , опишем переход к . Найдем индексы , , , , такие, что:

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

Вычислим , рассмотрим случай, когда , в противном случае рассуждения будут аналогичными. План и вычисляются по формулам:

1. ,
2. .

В данном случае . Доказательство сходимости приведено в источнике [1].

1. **МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА**
   1. **Постановка задачи**

Пусть в пространстве с евклидовой нормой заданы два конечных множества точек и , где . Для визуализации возьмем пространство .

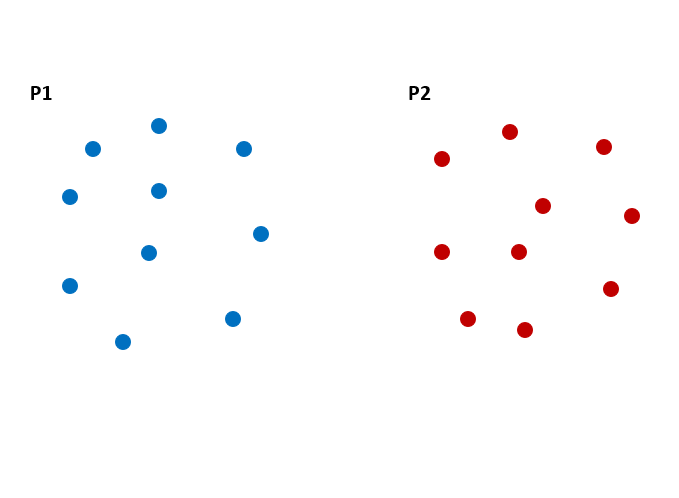


Рисунок 5 – Множества и

Обозначим выпуклую оболочку множества через , а выпуклую оболочку множества через .

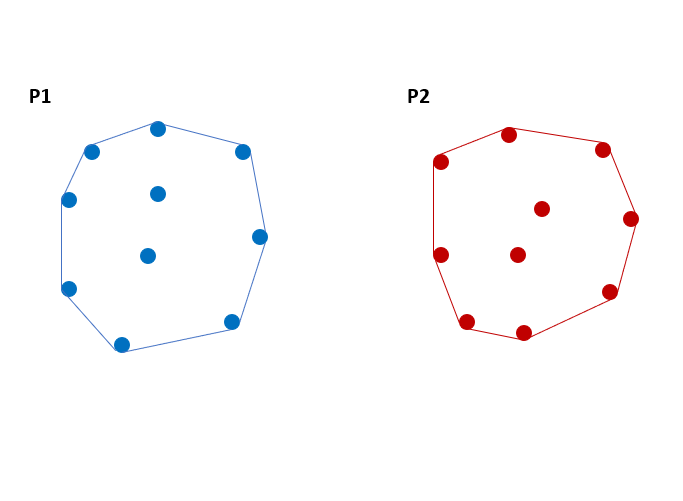


Рисунок 6 – Выпуклые оболочки множеств и

Возьмем 2 произвольные точки: , .

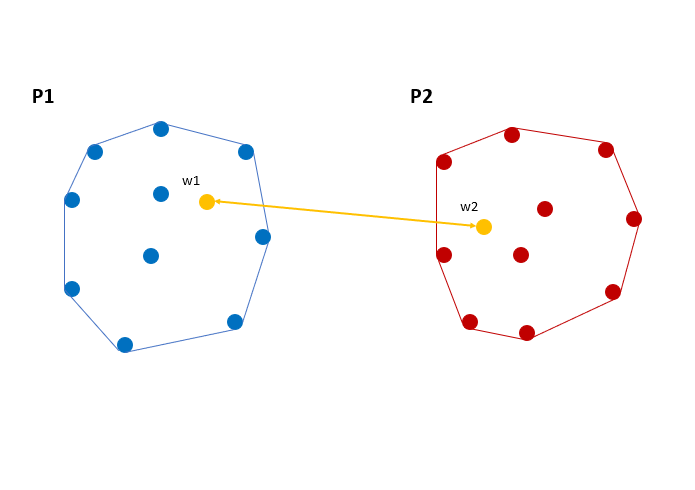


Рисунок 7 – Произвольные точки ,

Квадратичная задача математической диагностики ставится следующим образом: .

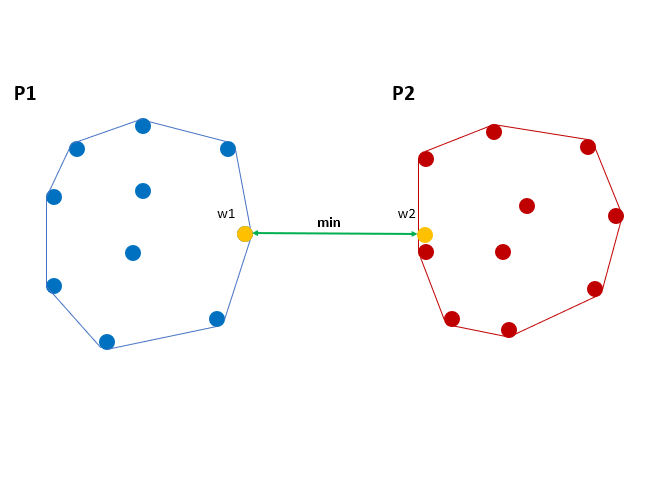


Рисунок 8 – Решение задачи

* 1. **Оценка плана задачи**

Возьмем любой план задачи , вычислим . Найдем такие индексы

, , что:

1. ,
2. .

Введем оценку . План является оптимальным планом в том и только том случае, когда . Доказательство этого факта, а также предложение, как с помощью величины оценить близость вектора к оптимальному решению, приведены в источнике [2].

* 1. **Описание алгоритма**

Предположим, что уже имеется -е приближение , вычислим . Найдем такие индексы , , что:

1. ,
2. .

Вычислим оценку , если , то алгоритм заканчивает работу. Пусть . Тогда построим новый план по формуле:

1. , где .
2. **РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ**
   1. **Начальное приближение**

В качестве списков точек будем использовать массивы библиотеки NumPy, так как в данной библиотеке реализованы методы для выполнения арифметических операций над векторами.

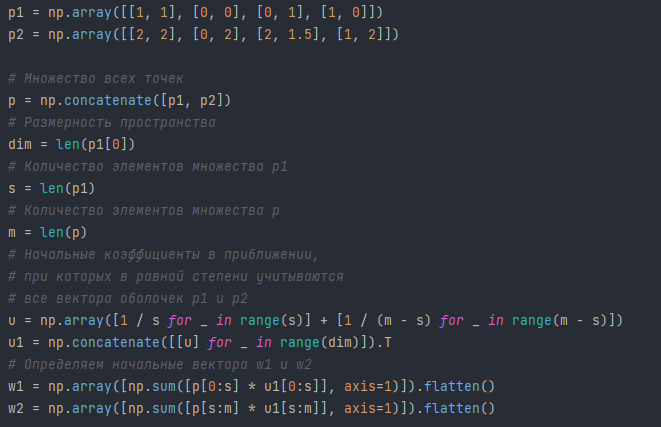
****

Рисунок 9 – Начальное приближение

* 1. **MDM-метод**
     1. **Реализация характеристической функции**

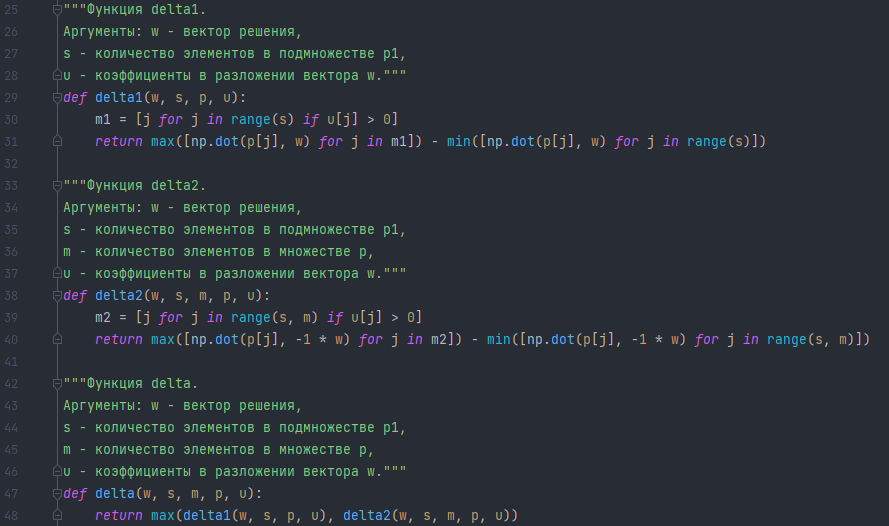
****

Рисунок 10 – реализация характеристической функции для MDM-метода

* + 1. **Реализация алгоритма**

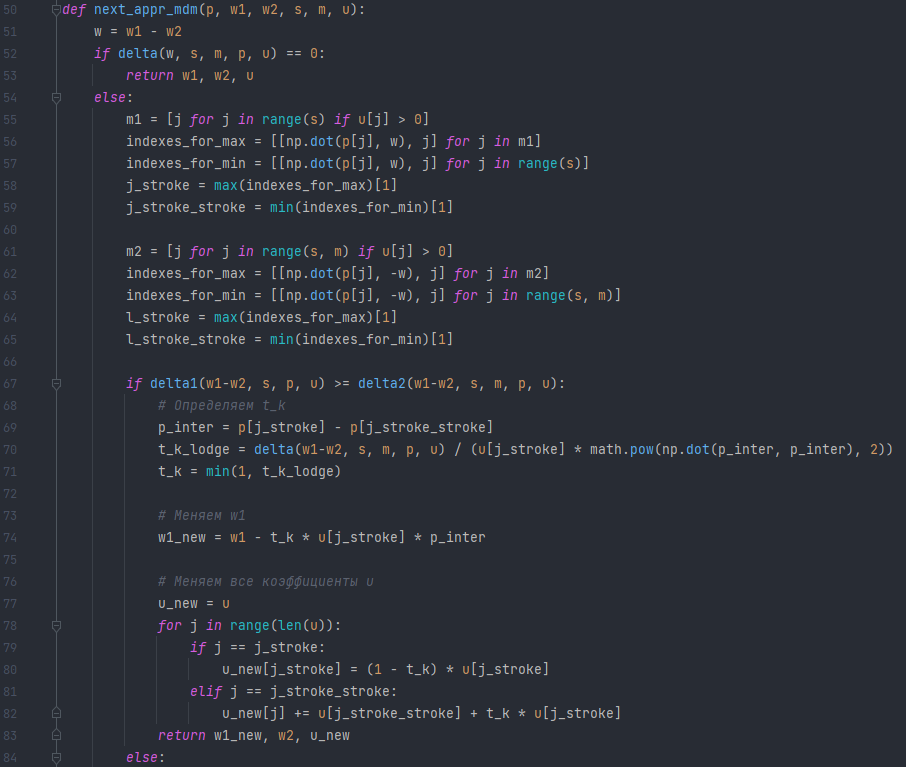
****

Рисунок 11 – Реализация алгоритма MDM-метода часть 1

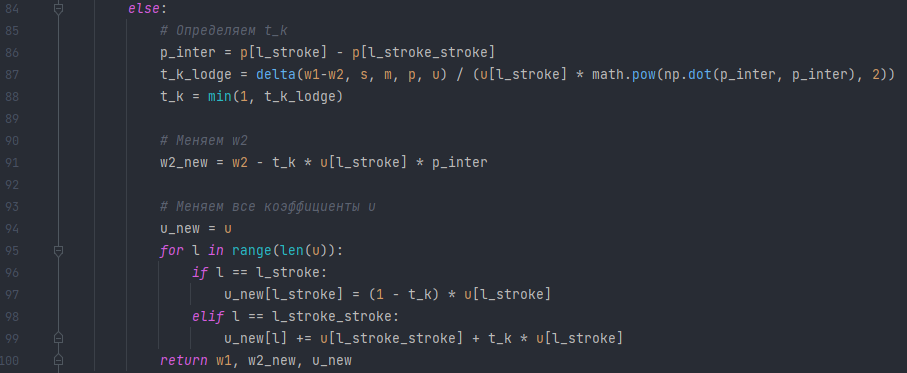


Рисунок 12 – Реализация алгоритма MDM-метода часть 2

* 1. **Метод условного градиента**
     1. **Реализация характеристической функции**

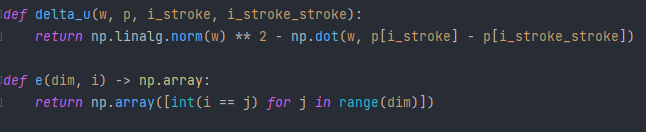
****

Рисунок 13 – Реализация функции для метода условного градиента

* + 1. **Реализация алгоритма**

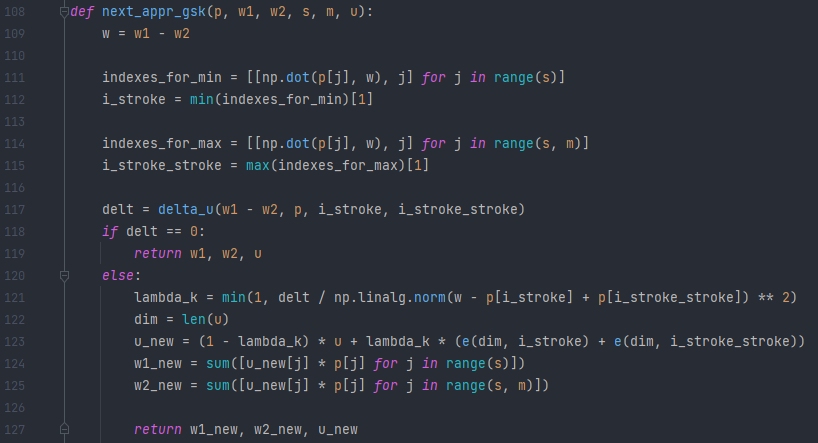


Рисунок 14 – Реализация алгоритма метода условного градиента

1. **ДЕМОНСТРАЦИЯ**

Для реализации графического интерфейса была выбрана библиотека «Tkinter», так как она включает в себя все необходимые инструменты.

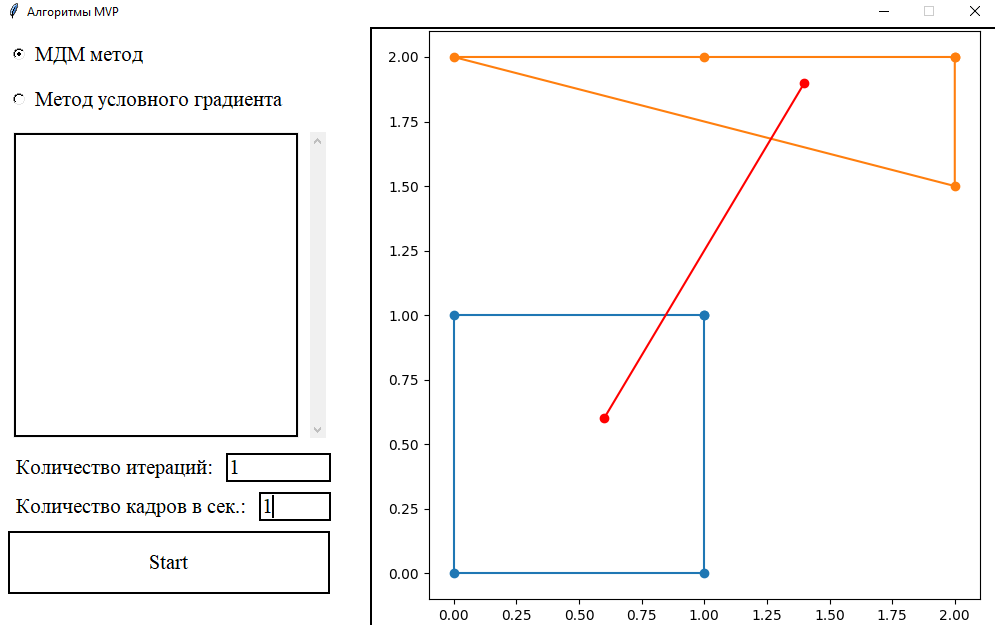


Рисунок 15 – Первое приближение работы алгоритмов

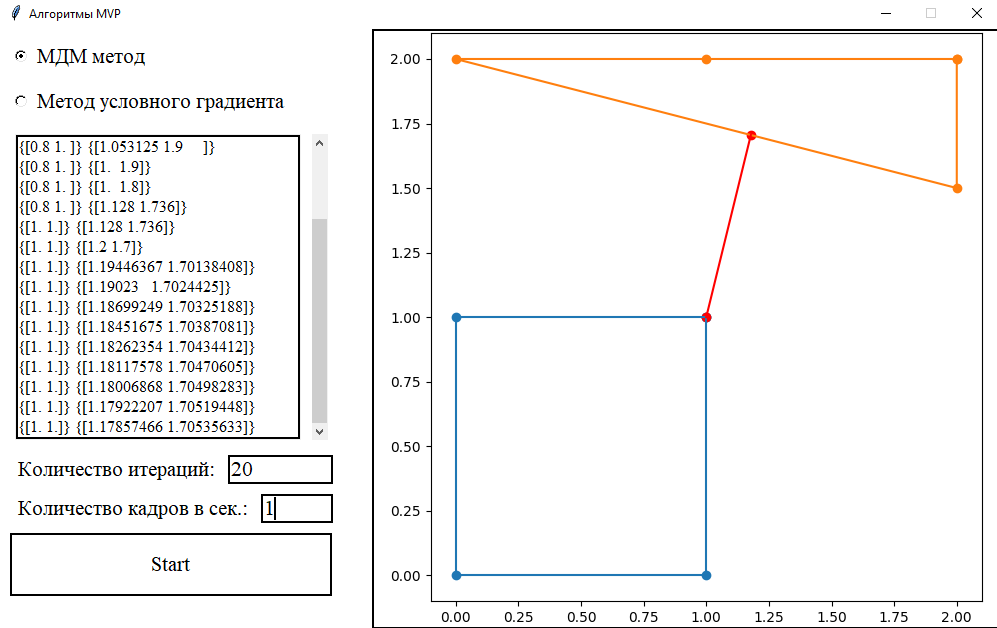


Рисунок 16 – 20-ая итерация MDM-метода

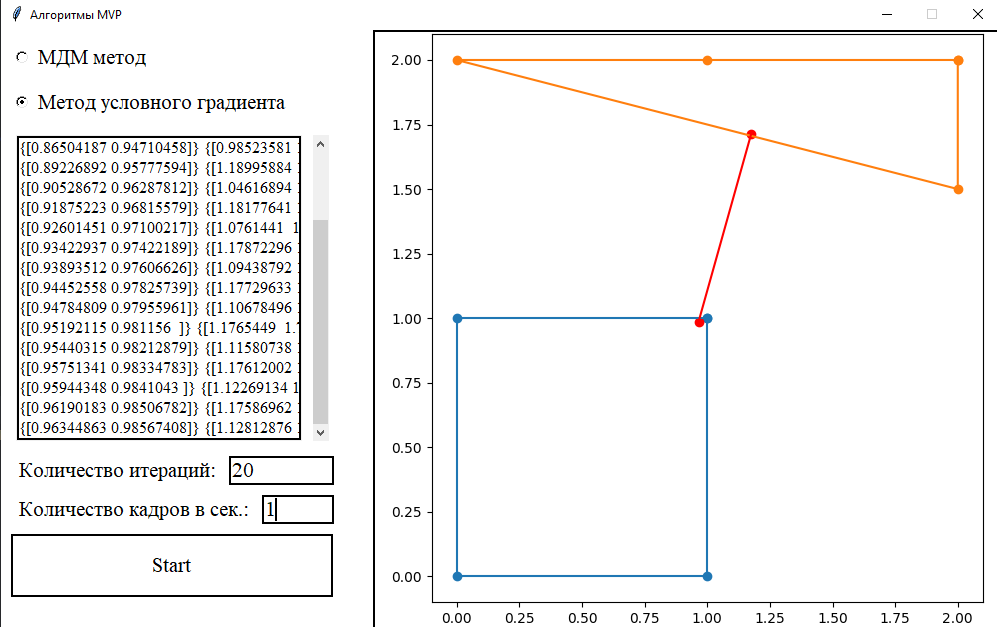


Рисунок 17 – 20-ая итерация метода условного градиента

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Все задачи курсовой работы были выполнены. Программу можно дополнить следующим функционалом:

1. ввести ещё один вариант остановки алгоритма – добавить возможность указать, до какой точности требуется выполнять алгоритм;
2. добавить 3D визуализацию работы алгоритма;
3. добавить возможность импортирования множеств точек из других источников;
4. создать режим проверки скорости каждого из алгоритмов.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Малоземов В. Н. МДМ-метод для решения общей квадратичной задачи математической диагностики / В.Н.Малоземов, Н.А.Соловьева ; С.-Петерб. гос. ун-т ; С.-Петерб. гос. экономический ун-т : 2022 г.
2. Малоземов В. Н. Метод условного градиента для решения общей квадратичной задачи математической диагностики / В.Н.Малоземов, Н.А.Соловьева ; С.-Петерб. гос. ун-т ; С.-Петерб. гос. экономический ун-т : 05.10.2023 г.
3. Малоземов В. Н. МДМ-методу – 50 лет / В.Н.Малоземов ; Избранные доклады ; 10.11.2021 г.